GUÍA DE TRABAJO VIRTUAL

ASIGNATURA: GEOMETRÍA ANALÍTICA SEMANA DE TRABAJO: 2-6 DE AGOSTO

Guía Elaborada por: Biviana Marcela Rodríguez Vargas

«Debemos aceptar la decepción finita, pero nunca debemos perder la esperanza infinita«

Martin Luther King

METAS DE APRENDIZAJE / COMPETENCIAS A DESARROLLAR

- Identificar los elementos de una PARÁBOLA.
- Encontrar la ecuación canónica de la parábola a partir de sus elementos.
- A partir de la ecuación canónica de la parábola, encontrar sus elementos.

LECTURAS

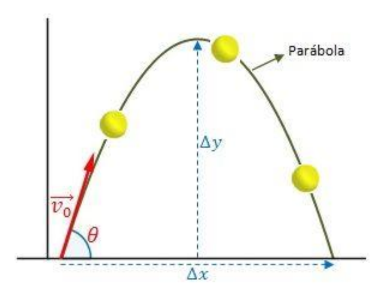
LECTURA 1

LA PARÁBOLA

Estas curvas tienen muchas aplicaciones importantes. Se emplean en el diseño de espejos parabólicos, reflectores y faros de automóvil. La trayectoria de un proyectil es una parábola, si se considera que el movimiento se lleva a cabo en un plano y se desprecia la resistencia del aire. Los arcos tienen algunas veces apariencia parabólica; y el cable de un puente suspendido puede colgar con la forma de una parábola. Las antenas para la recepción de señales de televisión provenientes de satélites son también de forma parabólica.

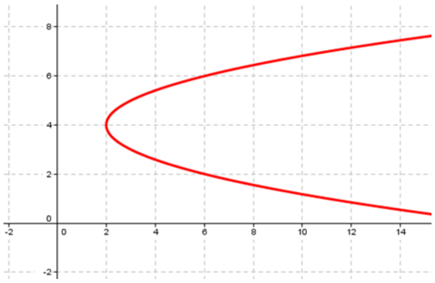
Fuente: Leithold, L. (2008). Matemáticas Previas al Cálculo. Tercera Edición. Página 165

Una de las **aplicaciones físicas** más importantes de la parábola es el **movimiento parabólico**. Este movimiento se caracteriza porque una partícula o cuerpo sólido lanzado en un campo gravitatorio recorre una trayectoria parabólica.



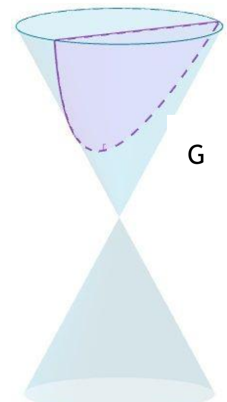
Fuente: Universofórmulas.com. (s.f). Parábola. Recuperado de https://www.universoformulas.com/matematicas/geometria/parabola/

La gráfica de una función cuadrática es una parábola. Pero el concepto geométrico de parábola es más amplio, como veremos a continuación. El siguiente gráfico muestra una «parábola horizontal»:



Nótese que la gráfica muestra una parábola que no es una función cuadrática.

Fuente: Álgebra y Geometría Analítica Online (2017). Parábola. Recuperado de https://aga.frba.utn.edu.ar/parabola/

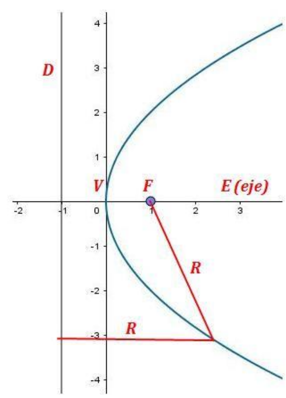


DEFINICIÓN DE PARÁBOLA:

La **parábola** es una sección cónica, resultado de la intersección de un cono recto con un plano que corta a la base del mismo, oblicuo a su eje y paralelo a una generatriz G de la superficie cónica.

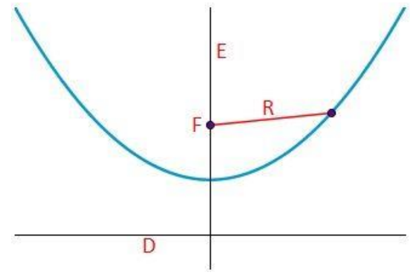
Una **parábola** es a su vez el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo, llamado foco y de una recta fija del mismo plano llamada directriz.

El foco y la directriz determinan cómo va a ser la apariencia de la parábola (en el sentido de que "parecerá" más o menos abierta según sea la distancia entre FOCO y la directriz). Todas las parábolas son semejantes. Su excentricidad es 1 en todos los casos. Solamente varía la escala.



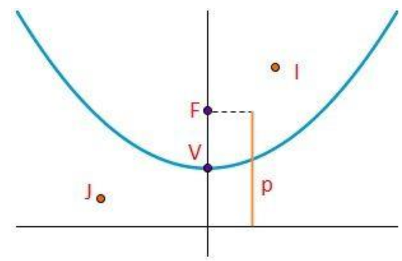
GUÍA DE TRABAJO VIRTUAL

ELEMENTOS DE UNA PARÁBOLA:



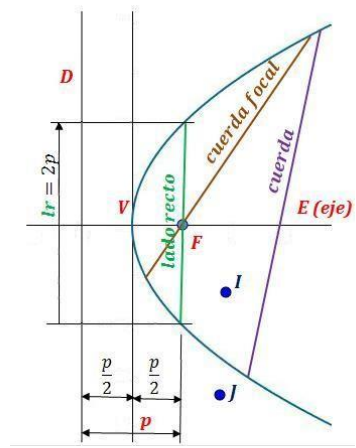
- **Foco**: el foco **F** es el punto fijo. Los puntos de la parábola equidistan del foco y la directriz.
- **Directriz**: es la recta fija **D**. Los puntos de la parábola equidistan de la directriz y el foco.

- Radio vector: es el segmento R que une el foco con cada uno de los puntos de la parábola. Es igual al segmento perpendicular a la directriz desde el punto correspondiente.
- Eje: es la recta E perpendicular a la directriz que pasa por el foco y el vértice. Es el eje de simetría de la parábola.
- **Parámetro**: es el vector **p**, que va desde el foco al punto más próximo de la directriz.



NOTA: Es importante el **signo del parámetro**. En las parábolas verticales, cuando el parámetro es positivo la parábola se abre hacia arriba. Cuando P es negativo, la parábola se abre hacia abajo. Igualmente, en las parábolas horizontales, cuando P es positivo, se abre hacia la derecha y cuando P es negativo, la parábola se abre a la izquierda.

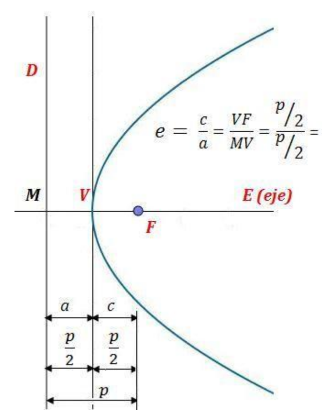
- Vértice: es el punto V de la intersección del eje y la parábola.
- Distancia focal: distancia entre el foco F y el vértice V. Es igual a P/2.
- Puntos interiores y exteriores: la parábola divide el plano en dos regiones. Los puntos que están en la región del foco se llaman puntos interiores (I), mientras que los otros son los exteriores (J).
- Cuerda: segmento que une dos puntos cualesquiera de la parábola.
- Cuerda focal: una cuerda que pasa por el foco F.
- Lado recto: Cuerda focal paralela a la directriz D y, por tanto, perpendicular al eje E. Su longitud es dos veces el parámetro (2P, pues se ven en la figura dos cuadrados unidos iguales de lado P).



EXCENTRICIDAD DE LA PARÁBOLA

La parábola es la única de las cónicas cuya **excentricidad** es siempre **1**.

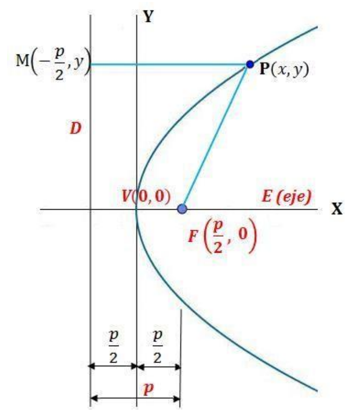
Por la misma definición de parábola, su excentricidad siempre es la unidad. De esto deriva que todas las parábolas sean **semejantes**, variando su apariencia de cerradas o abiertas, según la escala.



ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA

La **ecuación de la parábola** depende de si el eje es vertical u horizontal. Si el eje es vertical, la Y será la variable dependiente. Si el eje es horizontal, será X la variable dependiente.

1. ECUACIÓN CANÓNICA O REDUCIDA DE LA PARÁBOLA



A. Consideremos una parábola cuyo eje es el eje de ordenadas, su vértice es el centro de coordenadas V (0, 0) y que está en la parte positiva de las X. En este caso, el foco estará necesariamente en F (P/2,0) . La ecuación de la recta directriz D será X = –P/2.

Los radios vectores FP y PM, correspondientes a cualquier punto P de la parábola (que, por definición, son iguales) tendrán la longitud:

$$FP = \sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2}$$

$$MP = \frac{p}{2} + x$$

$$FP = MP$$

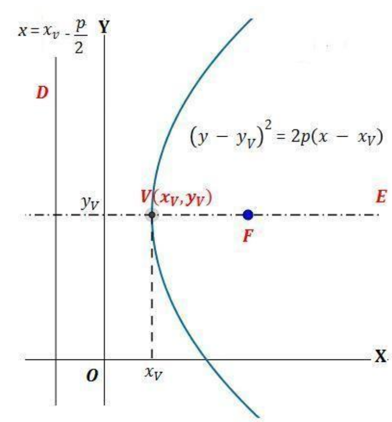
$$\sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2} = \frac{p}{2} + x$$

$$y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + x^2 + 2 \cdot \frac{px}{2}$$

Operando y simplificando, obtenemos la **ecuación canónica o reducida de la parábola** referida a esta configuración:

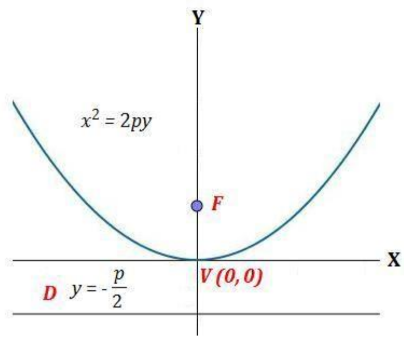
$$y^2 = 2px$$

B. Si se desplaza paralelamente el eje E al eje de ordenadas y el vértice de la parábola se lleva al punto V (XV,YV), la ecuación de esta parábola ahora será la que se muestra en la imagen. También se muestra la ecuación de la recta directriz D.

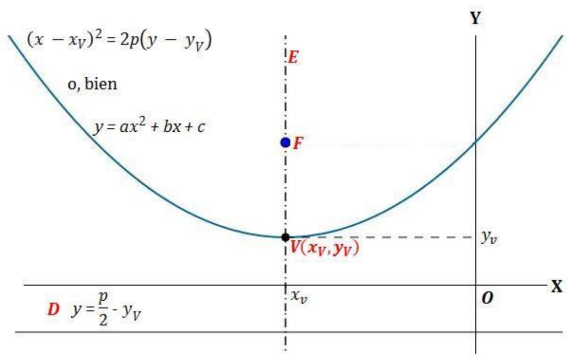


GUÍA DE TRABAJO VIRTUAL

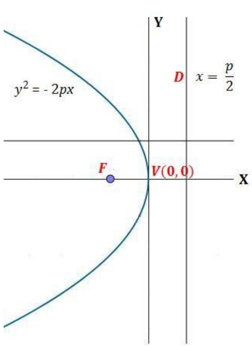
C. Ecuación canónica o reducida de la parábola, pero ahora con su eje coincidente con el eje de las abscisas, su vértice es el centro de coordenadas V (0,0) y que está en la parte positiva de las Y.

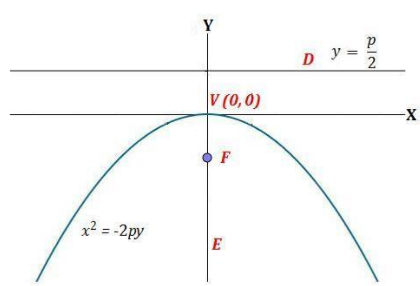


D. Si se desplaza paralelamente el eje E al eje de las abscisas y el vértice de la parábola se lleva al punto V (XV,YV), la ecuación de esta parábola ahora será la que se muestra en la imagen.



E. Análogamente, vemos las expresiones de la ecuación canónica o reducida para las parábolas con ejes coincidentes con el eje de ordenadas o con el eje de abscisas, siempre con el vértice en el origen O (0,0), pero ahora con valores negativos de las X y de las Y respectivamente. Se muestra en las dos imágenes siguientes:





EJEMPLO 1

Hallar la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje de las abcisas, que pasa por el punto (4,0) y su vértice está en (2,-1). Representar la gráficamente

Como el **eje de la parábola** E es paralelo al eje Y, la ecuación de la parábola será del tipo:

$$(x - x_V)^2 = 2p(y - y_V)$$

Sustituyendo las coordenadas del vértice en la ecuación:

$$(x - 2)^2 = 2p(y - (-1))$$

Sabemos que la parábola pasa por P (4,0), luego:

$$(4 - 2)^2 = 2p(0 + 1) \rightarrow$$

$$\rightarrow 4 = 2p \ ; \ p = 2$$

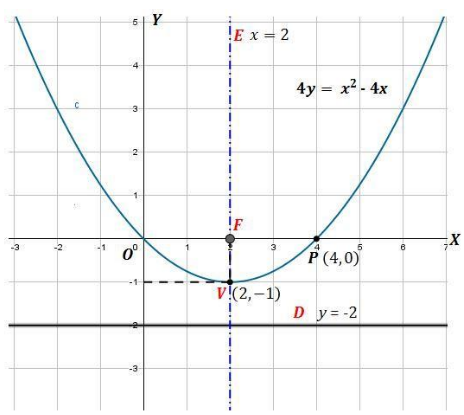
$$(x - 2)^2 = 2 \cdot 2 \cdot (y + 1) \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 4x + 4 = 4y + 4 \rightarrow$$

$$\rightarrow \mathbf{4y = x^2 - 4x}$$

Ésta es la ecuación buscada. Como la ordenada del vértice es 2, la ecuación del **eje de la parábola**, paralelo a Y será X = 2.

Finalmente, como hemos averiguado el parámetro P = 2, la recta directriz, que es perpendicular al eje E y paralelo al eje de ordenadas OX, estará a P/2 del vértice, luego su ecuación será Y = -1 –P/2 = -2.



Fuente: Universofórmulas.com. (s.f). Parábola. Recuperado de https://www.universoformulas.com/matematicas/geometria/parabola/

GUÍA DE TRABAJO VIRTUAL

RECURSOS

RECURSO 1

ELEMENTOS DE LA PARÁBOLA

Matemáticas profe Alex (2016). Recuperado https://www.youtube.com/watch?v=FlsYCYbmJGU

RECURSO 2

ECUACIÓN CANÓNICA DE LA PARÁBOLA

Matemáticas profe Alex (2016). Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=_Q9RXHL66oU&list=PLeySRPnY35dFIGukPbbnYmSxQkFoHWXJN&index=2

RECURSO 3

ELEMENTOS DE LA PARÁBOLA A PARTIR DE LA ECUACIÓN CANÓNICA

Matemáticas profe Alex (2017). Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=DXrwxQlLs5E&list=PLeySRPnY35dFIGukPbbnYmSxQkFoHWXJN&index=3

ACTIVIDADES

ACTIVIDAD 1

Desarrollar los siguientes ejercicios:

1. Halla la ecuación canónica de cada parábola según las condiciones dadas.
   a. El vértice está en (2,2) y el lado recto mide 4 unidades y corresponde con el eje Y
   b. El eje de simetría es la recta x-5=0, el foco está en (5,-4) y la directriz pasa por (2,-7)
   c. Su vértice está en (3,0) y la directriz es el eje Y
   d. Su vértice está en (1,5) y pasa por (-1,3)
2. Determina los elementos de cada parábola (foco, directriz, eje de simetría, vértice, lado recto) a partir de la ecuación, ubicándolos sobre la gráfica de la misma:
   a. $(x+3)^2 = 9(y-6)$
   b. $x^2 = -8(y+1)$
   c. $y^2 = 16(x+7)$
   d. $\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = -24(x+1)$
   e. $(x-1)^2 = 3(y-2)$
   f. $y^2 = -28x$
3. Indica si cada ecuación representa una circunferencia, una recta o una parábola(realizar la gráfica)
   a. $(y+3)^2 = -24(x-7)$
   b. $(x-1)^2 = 9-(y-2)^2$
   c. $x-y-1=0$
   d. $y^2-8x=0$
   e. $x^2 = 4-y^2$

GUÍA DE TRABAJO VIRTUAL

EVALUACIONES

Presentar el desarrollo de los ejercicios en forma de trabajo, el viernes 6 de Agosto.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN Y PLAZOS DE ENTREGA

Si tienen alguna duda, por favor escribir al correo rbivianamarcela@gmail.com, y con gusto les devolveré resueltas sus inquietudes o comunicarse vía WhatsApp en un horario de 6:30 a.m. a 12:30 p.m.

INFORMACIÓN DE CONTACTO

DOCENTE 1

- Nombre: Biviana Marcela Rodríguez Vargas
- Grupos: 11-4
- Correo: rbivianamarcela@gmail.com